Intellectica, 2002/2, 35, pp. 199-215

Réponse : continu vs. discret mathématiques et régimes de causalité.

Giuseppe Longo*

PRÉMISSE

Les liens causaux sont des structures de l'intelligibilité : ils participent de l'organisation humaine des phénomènes naturels et les rendent intelligibles. Nous posons ces liens suite à une friction avec certaines régularités du réel (celles que l'on "voit"), qui à leur tour canalisent notre action cognitive. Les mathématiques sont au cœur de cette construction de connaissance et, en particulier, le choix des mathématiques du continu ou du discret a marqué de manière constitutive l'histoire de notre rapport au monde. Avant de discuter des commentaires, fort pertinents, à mon article, j'essayerai d'explorer, en tant qu'encadrement du questionnement posé, dans quel sens ce choix nous propose des régimes différents de causalité[1].

AU SUJET DES RÉGIMES DE CAUSALITÉ PHYSIQUES.

Depuis Galilée, Leibniz et Newton, nous nous sommes donnés des outils mathématiques pour la pensée physique ; ces outils sont au cœur de la construction de l'objectivité scientifique. En fait, ils ont été façonnés, d'une part, dans leur rapport aux phénomènes étudiés ; de l'autre, les concepts physiques rigoureux de force, de vitesse et d'accélération... avec leurs relations causales, sont donnés (constitués) par des équations, des opérations mathématiques de limite et des notions d'infinitésimaux, à l'origine du calcul différentiel.

Dans cette construction, Newton et Leibniz esquissent des théories du continu ; Cantor et Weierstrass leur donnent des fondements, très particuliers, mais solides, par approximation arithmétique des limites. Ce continu est donc une limite, approximable à la Cantor-Weierstrass ; ses transformations continues

* CNRS et Dépt. d'Informatique. École Normale Supérieure, Paris et CREA, École Polytechnique, http://www.di.ens.fr/users/longo

[1] La physique du 20ème siècle a transformé (a compris) certaines "lois causales" en termes de lois ou, mieux, "relations structurelles", de symétries et brisure de symétries en particulier, [Weyl, 1927 et 1952], [vanFrassen, 1994] (voir [Bailly, Longo, 2003 et 2004]). Le passage des unes aux autres, toujours très informatif, est parfois difficile : on préfère garder ici et pour le moment, la terminologie traditionnelle de "structures ou régimes de causalité", plus facile à saisir et encore largement employé en physique aussi bien que en sciences cognitives (voir [van Gelder, 1998] et le débat sur la "dynamical hypothesis" dans le même numéro de la revue).

(différentiables) sont aussi approximables, par des séries de Fourier par exemple. En effet, selon Laplace, une bonne approximation des conditions initiales d'un système physique aurait dû déterminer une bonne approximation de l'évolution du système (de ses transformations). En fin de compte, même si on n'avait pas pu "voir" et proposer ces opérations nouvelles de limites et ces variations infinitésimales sans des mathématiques du "continu", dans un cadre newtonien-laplacien la discrétisation arithmétique suffit à les décrire, par approximations successives. L'arithmétique permet donc, d'une part, de sortir de l'impasse fondationnelle des nouvelles géométries (par le biais des systèmes logico-formels à la Frege-Peano-Hilbert et leur codage arithmétique), et, en même temps, de fonder, a posteriori, ces opérations de limite aussi mystérieuses qu'intrinsèques au calcul infinitésimal de Newton et Leibniz, par la plus importante des théories mathématiques du continu, celle de Cantor et Dedekind. L'approximation à partir de mesures **exactes**, comme les nombres entiers, et **absolues** (« la grandeur arithmétique est un absolu », écrit Frege) fonde tout ce qui est intelligible dans l'espace et le temps, en fait « tout ce qui est pensable » (Frege, 1884). Et dans la physique des systèmes laplaciens ou suffisamment stables, les solutions approximées (en fait, digitales ou arithmétiques) suivent fidèlement les trajectoires continues.

Riemann et Poincaré proposent deux tournants conceptuels autant radicaux que différents : leurs travaux sont à l'origine de la géométrisation de la physique mais possèdent aussi une perspective fondationnelle. Pour le premier, la courbure de l'éther, un continu parfaitement élastique, peut rendre compte de ces mystérieuses forces à distance et servir à les unifier. Le deuxième met en évidence la différence entre la complexité équationnelle des mouvements des corps célestes et la complexité géométrique de leurs évolutions, de leur dynamique. L'approximation propre à la mesure physique joue un rôle central dans son approche et bouleverse le cadre laplacien, comme l'on verra. Les deux théories se fondent sur l'analyse des hypothèses faites sur l'espace physique, de "l'accès" (à l'espace-temps), de la mesure (voir (Longo, 2003)).

Réfléchissons d'abord à la géométrie des systèmes dynamiques de Poincaré. Poincaré n'ouvre point la voie à l'"indétermination chaotique" comme certains nous font croire. Au contraire et comme on a déjà observé, Poincaré est profondément ancré à une conception classique de la physique et par son travail, il ramène même l'aléatoire classique sous le "contrôle" de la détermination. En fait, les systèmes dynamiques modernes élargissent le concept de détermination en incluant dans cette dernière la fluctuation et la perturbation, voire la variation en dessous de la mesure possible. Bref, leurs mathématiques mettent en évidence la façon dont l'évolution d'un système peut aussi *dépendre* de ces éléments qui étaient considérés comme des accidents mineurs de l'analyse physico-mathématique ; en d'autres termes, le *régime causal*, en tant que cadre qui *détermine* l'évolution d'un système, en vient à *inclure* la variation, la perturbation ou la fluctuation, même *quand elles sont en dessous de la mesure physique*. Ou, encore, une trajectoire spécifique est déterminée par des équations, si possible, *ainsi que* par des variations/perturbations/fluctuations de son point d'origine (ou de ses conditions aux limites) Or, ce concept élargi (et affaibli) de détermination n'implique plus la prédictibilité laplacienne, voilà le tournant qui a fait tant de bruit, fort justement, mais un bruit qui a parfois mal saisi cet *élargissement* du rôle de la détermination classique (depuis, on considère le Loto, le jet des dés … comme des systèmes déterministes, contrairement à l'analyse purement probabiliste qu'en fait la physique laplacienne). Mais alors, l'approximation, propre à la mesure physique, acquiert un rôle crucial : elle participe à la construction de l'objectivité scientifique de façon essentielle, par le fait même de ne pas être exacte.

Quant à Riemann, la cassure cette fois est par rapport à l'absolu de l'espace-temps Newtonien, en particulier à l'absolu de la mesure : on ne peut plus fixer un système de repères cartésiens au choix, n'importe où dans l'espace et le temps, ainsi qu'une mesure quelconque, tout en considérant l'espace, le temps et la mesure comme des absolus (pour Riemann, la structure métrique est corrélée à la courbure de l'espace). Einstein centrera sa construction scientifique sur le rôle du système de référence et de la mesure associée : Weyl nous l'expliquera grâce à une théorie mathématique du changement de jauge qui fait comprendre le passage de Newton à Einstein comme le passage de *subjectif absolu* à l'*objectif relativisant*, en physique (voir (Bailly, Longo, 2004)). La détermination relativiste inclut alors, d'une façon essentielle à la théorie, le relatif de la mesure et des repères spatio-temporels ; par conséquent, dans les espaces relativistes de Minkowski, par exemple, les corrélations causales sont différentes de celles de l'espace newtonien.

Résumons notre thèse : une structuration du réel par une géométrie du continu ou par une discrétisation arithmétique induit des regards scientifiques très différents, tout comme les réflexions sur le continu de Leibniz, Goethe, Peirce et Wittgenstein (des années '30) proposent une philosophie bien spécifique de la connaissance, par rapport aux approches logico-arithmétiques (voir (Fabbrichesi, 2001)).

Voilà donc la bifurcation qui s'est produite dans l'histoire : d'une part, l'exigence fort justifiée de "fonder" les mathématiques sur l'exactitude et l'absolu arithmétiques, après la crise du rapport à l'espace physique ; celle-ci avait été causée, justement, par l'invention des variétés riemaniennes, dépourvues d'intuition sensible. De l'autre, la géométrisation de la physique, centrée sur l'approximation (de la mesure) et la relativisation (au système de référence et à la courbure de l'espace).

Or, la première branche de cette bifurcation nous a donné, entre autres, des machines arithmétiques formidables ; la deuxième deux grandes théories de la physique moderne. En bref, la première a suivi le parcours conceptuel suivant : « ils existent les lois universelles et absolues de la pensée, indépendantes de l'homme et de toute implantation matérielle » (Boole, Frege), « l'induction arithmétique en est un des piliers » (Frege), « on transcrit ces lois dans des suites finies de signes sans significations, maniables d'une façon potentiellement mécanisable ; dans ce cadre, la notion de preuve est décidable, voire les théorèmes sont décidables, à la machine » (Hilbert), « une machine logico-arithmétique qui sépare logiciel de matériel et fait "droite, gauche, 0, 1", peut tout calculer/démontrer » (Turing) ; « tous les systèmes logico-formels pour la déduction/calcul sont équivalents : nous avons donc un absolu, la calculabilité à la Church-Turing » (Godel, Kleene, Church, Turing). Et voilà l'acte de naissance des machines logico-arithmétiques, l'outil le plus extraordinaire que l'homme s'est donné et qui est en train de transformer le monde.

Ces machines sont arithmétiques en particulier au sens où la "mesure", en tant qu'accès à la base des données utilisées par les calculs (qui constituent l'évolution du système), est exacte et absolue : toute la théorie de la calculabilité, de la programmation, des bases de données présuppose que ces dernières soient accessibles d'une façon exacte et absolue (un bit sera 0 ou 1, et l'un ou l'autre, exactement ; de surcroît, sa valeur n'est pas relative à la mesure ni au protocole d'accès). Bien évidemment, on peut complexifier les choses de façon ad hoc et pour des bonnes raisons, et il existe des cas intéressants où ces deux aspects sont remis en question, on y reviendra dans les réponses aux commentaires, mais nous parlons ici de ce qui est *intrinsèque* à la théorie. Et cela est aussi au cœur des applications : quand vous téléchargez une page web du Québec, vous voulez que l'accès à la base de données lointaine soit exact, pas une virgule ne doit manquer ; si les accents sont mal reproduits, vous devenez furieux ; de plus, l'accès doit être absolu, c'est-à-dire ne pas dépendre du protocole de transfert utilisé (http, ftp …), ni du parcours (passant par des nœuds au Japon ou en Islande ? on ne veut même pas le savoir), et itérable à loisir, à l'identique, tout comme le logiciel que vous achetez. Enfin, tout logiciel doit être indépendant de l'implantation matérielle : voilà le rêve de Frege enfin réalisé (« le théorème de Pythagore ne dépend pas du phosphore dans le cerveau », sa fameuse remarque). Or, les réseaux et les systèmes distribués (dans l'espace et le temps) posent sûrement des problèmes, y compris pour l'itération des processus : ces problèmes sont logiques (la complexité du réseau), mais ils dérivent aussi, justement, de la "friction" entre les différents régimes causaux de la machine et d'un environnement que l'on saisi mieux par des dynamiques spatio-temporels.

Mettons de côté pour le moment l'hypothèse computationnelle, qui donnerait à ces machines arithmétiques un rôle de modélisation, voire descriptif de l'essence, de maints phénomènes naturels, y compris cognitifs. Et considérons seulement leur talent calculatoire. Alors, les algorithmes et le cadre de certitude arithmétiques, pourraient bien rendre compte, du moins de façon indirecte et approximative, de toute dynamique physique, voire biologique (ou cognitive, même dans l'hypothèse dynamique en cognition) : ils constitueraient des *modèles* digitaux, donc approximés, de *toute modélisation* par les mathématiques du continu. En fait, même les teneurs de l'hypothèse dynamique en Sciences Cognitives le pensent (voir (van Gelder, 1998) et ses commentateurs). En effet, un premier regard sur les méthodes numériques fait normalement croire que, étant donné un système dynamique, toute trajectoire (évolution) continue peut être approximée par une trajectoire (évolution) engendrée par une MED. Par exemple, une suite engendrée par la fonction logistique (voir l'article cible), dans le continu, serait toujours approchée par sa variante digitale (avec ses arrondis, à chaque pas). Or, en général, il n'en est rien : les arrondis, inévitables pour la machine arithmétique, ont le même effet que des "petites perturbations" et, à cause de l'instabilité du système, ils suffisent à engendrer des énormes changements de trajectoire, dans le temps. Des théorèmes de "stabilité" ou des "lemmes de poursuite" garantissent, pour quelques systèmes dynamiques suffisamment réguliers, que la simulation est toutefois "*globalement* bonne" : les lemmes de poursuite, par exemple, assurent au plus que *les approximations digitales* sont *approchées par* des évolutions continues, mais … le contraire n'est pas nécessairement vrai (bref, pour la suite logistique, ce n'est pas le cas qu'à toute suite continue on puisse associer une approximation digitale qui la "poursuit de près", mais … en revanche, ce sont les suites digitales qui peuvent être approchées - poursuivies - par des suites continues : ce renversement des quantificateurs logiques est, bien évidemment, très important et motive les analyses fines de ces résultats, voir (Pilyugin 1999)). Pour certains systèmes, même la faible garantie d'approximation globale, donnée par le lemme des poursuites, fait faillite, (Sauer, 2003). L'imitation computationnelle, en ajoutant des perturbations dues à l'arrondi arithmétique (un fait intrinsèque à la digitalisation), modifie l'organisation causale, telle qu'elle est proposée par les équations d'une dynamique, car l'arrondi peut *causer* un changement important de trajectoire. Et cela va de pair avec les deux autres composantes du changement structurel, par rapport à la physique mathématique moderne, relatif à la mesure : dans son propre univers, la machine a un accès exact et absolu aux données.

En conclusion, pour ces trois différents aspects, la machine en général ne donne pas un modèle, voire l'approximation digitale d'un modèle physico-mathématique (en tant que tentative de saisir des principes constitutifs-causaux d'un phénomène), mais une imitation, avec son propre régime causal. Et quand on voit cette merveille moderne qui est la construction d'un attracteur sur l'écran d'un ordinateur, on doit savoir (ce que certains spécialistes savent très bien) qu'il n'y a là qu'une image qualitativement similaire à la dynamique continue que l'on prétend approximer ; que, grâce à un extraordinaire effort *quantitatif*, nous n'avons qu'une *imitation qualitative* d'un phénomène (une imitation formidable, mais distinguable : appuyez sur la touche "restart"…). La science moderne est en train de se façonner, fort justement, autour de ces outils pour la pensée ; il faut donc réfléchir de près à la structure interne des images que ces imitations nous donnent du monde.

CONSÉQUENCES ÉPISTÉMOLOGIQUES

Quand des paradigmes nouveaux pour les fondements et les applications des mathématiques sont proposés, comme, d'une part, l'analyse conceptuelle profonde de Frege et la structure de la quantification logique qu'il développe, jusqu'au programme d'Hilbert, ou, de l'autre, les nouvelles méthodes géométriques pour la physique, une philosophie de la nature les accompagne, parfois implicite. Il n'est donc point illégitime de projeter sur la machine des propriétés qui faisaient référence à la pensée, car cette projection a été faite, dès que la machine est conçue comme *machine pour la pensée*, voire comme modèle (essence ?) de la cognition, du vivant, du monde : ce passage n'a fait qu'expliciter une philosophie de la nature implicite ou qui fait suite au paradigme arithmétique pour les fondements des mathématiques. Voilà donc que la recherche de certitudes fondationnelles dans l'accès exact et absolu aux nombres entiers, sans le flou du continu, de la courbure de l'espace, devient une philosophie de la connaissance; et le "non ignorabimus" de Hilbert ("tout énoncé mathématique est décidable"), à l'origine un programme interne aux mathématiques ("tout est réductible à - encodable dans - l'arithmétique" et … "l'arithmétique est complète"), devient un programme scientifique général qui … nous laisse fort perplexes, 20 ou 30 ans après les résultats de Poincaré sur l'imprédictibilité-indécidabilité inhérente aux systèmes déterministes (*formellement* décrits par un ensemble fini d'équations). Et, conséquence ultime de la philosophie de la nature propre à l'approche formaliste, au sujet des machines arithmétiques qui seront le produit de ce programme fort et important, on parlera d'une image, d'un modèle du monde. Du reste, les mathématiques, y compris l'arithmétique, sont dans le monde, car nous les posons dans le monde, car elles le structurent. En particulier, quand on projette sur le monde cette grille de lecture exacte et absolue, dont le "non ignorabimus" d'Hilbert est la conséquence épistémologique, on propose un autre *régime de causalité*, voire une autre structure de l'intelligibilité, par rapport à ceux de la physique mathématique du continu spatio-temporel, car l'approximation, qui implique l'imprédictibilité, et la relativisation, qui empêche l'absolu, participent de la détermination physique et elles sont exclues du cadre conceptuel des certitudes arithmétiques.

Il ne faut toutefois pas oublier que ces machines sont aujourd'hui *essentielles* à la science. En fait, les ordinateurs sont au cœur de toute construction scientifique, ils sont même impliquées dans toute mesure physique ; ils aident à la preuve mathématique, en développant des calculs et des déductions formelles autrefois impossibles (le théorème de quatre couleurs a confié à la machine des immenses tâches calculatoires ; elle nous remplace dans les fragments formels de la preuve ; même l'attracteur de Lorenz est le produit d'une machine, extraordinaire image - imitation qualititave d'un processus dynamique). Maintenant que ces machines sont indispensables, voire qu'elles sont en train de devenir *inhérentes* (et j'utilise ce mot fort) à la construction de la connaissance scientifique, qu'elles donnent des ailes à la pensée, par leurs bases de données immenses et exactes, par la rapidité, la fiabilité et l'itération parfaite, il faut sortir des mythes d'une philosophie de la nature (implicite et) erronée même il y a 100 ans. D'autant plus cela est nécessaire, car nos outils, nos instruments d'action sur le monde sont au centre de notre humanité. Cette dernière commence avec la première pierre taillée. Elle continue par la construction, que sais-je, de la roue, des horloges … de la machine à vapeur. Sûrement le premier homme qui a construit une roue a dit, dans son enthousiasme de créateur : « mon mouvement, *le* mouvement est là : la roue est complète, on y va partout ». Mais non, dès qu'il y a une grosse pierre sur le chemin, elle ne marche plus …. Cela n'empêche que la roue est formidable. De même diront, avec Vaucanson, les inventeurs des extraordinaires systèmes d'engrenages du 18ème siècle : on y est, ils sont un modèle complet de l'homme, en fait ils sont l'essence même de notre être biologique, une statue d'automate. Mais les vraies applications commencent quand on arrête de construire des canards et des danseuses mécaniques (dommage, car ils sont si beaux), on ne parle plus de la modélisation/essence du vivant et l'on bâtit les machines de la grande industrie moderne, avec ces mêmes engrenages, poussés par la vapeur.

SYNTHESE ET CONCLUSION

Pour nous résumer : les structures discrètes (ou de la discrétisation) propre à l'arithmétique proposent une grille d'accès aux phénomènes, où l'on *perd le sens* de l'approximation continue, de la fluctuation, de la contiguïté (déjà Aristote avait observé que le continu chez Euclide sert à décrire la contiguïté), de la corrélation (la topologie discrète ne permet pas de décrire la corrélation physique en tant que voisinage-proximité causale), de la dépendance du système de référence. En fait, elles se basent sur la mesure en tant qu'*exacte* et *absolue*, grâce à des arrondis, sorte de perturbations qui participent au régime causal, mais qui n'ont rien à voir, a priori, avec celles que nous saisissons dans le monde physique ou du vivant[2]. Or, quant à l'exactitude et à l'absolu :

- en physique des systèmes dynamiques, le fait que la mesure *ne soit pas exacte* est au cœur de la théorie,
- en physique relativiste, la mesure *n'est pas absolue* (et cela est inhérent à la théorie) ;

quand ces aspects de la mesure interviennent dans la simulation/modélisation discrète, la perte de structure devient cruciale, car elle modifie le régime causal : ce dernier n'intègre plus la variation en dessous de la mesure ni la relativisation. L'enjeu est énorme, car en dehors des systèmes linéaires ou suffisamment stables, l'approximation et le choix du système de référence ne sont plus des invariants du processus (à moins de transformations de jauge, pour ce qui concerne les systèmes de référence). Et le passage des mathématiques du continu à celles du discret, en particulier quand elles sont implantées sur un ordinateur, impose alors une différente organisation causale.

Nous avons laissé de côté la Physique Quantique. Dans ce cas, la mesure *n'est ni exacte ni absolue*, mais pour tout autre raison et dans tout autre sens. L'indétermination de la mesure est essentielle à la construction théorique et les mesures dépendent même de l'instrument et de l'ordre dans lequel elles sont effectuées. Mais l'analyse ne se fait point dans les termes classiques ou relativistes utilisés plus haut : le discret et le continu se superposent, tout comme le photon qui se présente en tant que onde continue ou particule, selon l'instrument de mesure utilisé. Et ce discret n'est pas local, il est non-séparable : il n'a rien à voir avec la topologie discrète des structures arithmétisées, les petites boîtes bien séparées et locales des données digitales. Pour cette raison, en physique quantique on ressent fortement le besoin d'une nouvelle théorie du continu dont la construction ne démarre pas nécessairement par des points (feuilletages du tore, cordes, fractales des théories d'échelle... ?). Et le débat prend tout autre allure.

---

[2] Normalement, pour appliquer les théorèmes de stabilité ou les "lemmes des poursuites" à l'arrondi, on considère ce dernier comme une perturbation. En lisant cette page, Thierry Paul (mathématicien de la physique quantique) observait que l'arrondi paraît plutôt jouer un rôle comparable à la mesure en physique quantique. Celle-ci ne s'analyse plus, aujourd'hui, en termes de perturbation, mais plutôt en tant qu'interaction de niveaux phénoménaux différents, sorte d'intrication sujet/objet, qui change les phénomènes aux deux niveaux. Cette lecture de l'arrondi renforce l'idée qu'il contribue au changement de l'organisation causale, au cours d'un processus : en détruisant de l'information, il participe à la détermination de l'évolution du système couplé (ordinateur, dynamique mathématique).

AU SUJET DES COMMENTAIRES

La Physique Quantique nous permet d'enchaîner avec un bref commentaire sur le texte de **Mioara Mugur-Schächter**. Cette physicienne et épistémologue bien connue de la Physique Quantique reprend tout d'abord le jeu de l'imitation du point de vue du regard constitutif de l'expérience elle-même. En se posant en amont de l'analyse que j'ai proposé, elle questionne la genèse même des séquences comportementales. C'est-à-dire, elle pose le problème de la construction du cadre conceptuel et expérimental pour le jeu de l'imitation ; tout comme le physicien (de la Physique Quantique en particulier) doit d'abord expliciter la mise en place des protocoles et des instruments d'accès à / construction de la (micro-)physique. Son texte, je dirais, clarifie de façon encore plus fondamentale les maints présupposés aussi arbitraires que naïfs qui sont au cœur de toute équivalence fonctionnelle homme/machine. Cela ne fait que confirmer l'attention qu'il faut avoir au rôle des mathématiques utilisées (discrètes vs. continues, typiquement) dans nos tentatives d'intelligibilité : elles sont notre instrument conceptuel principal.

Son commentaire reprend aussi les sept lignes que j'ai dédiées à la Physique Quantique : ces lignes sont déjà suffisamment hors thème (le jeu est proposé dans un cadre classique) pour que j'en dise plus. Toutefois, je suis très heureux que Mugur-Schächter ait repris cette question, car toute réflexion sur la connaissance devrait aujourd'hui être marqué par les enjeux de méthode proposés par la Physique Quantique. Un bouleversement radical, encore si mal assimilé et plus que pertinent pour les analyses de la cognition : notre système sensori-moteur n'est-il pas notre système d'accès/mesure au/du monde ? Un instrument qui structure ce monde en même temps que le sujet cognitif.

Mugur-Schächter va bien plus loin dans une direction que je partage : en fait, il doit être clair que chaque fois que je parle de "essentiel", de "inhérent" … il s'agit de propriétés de la *construction théorique*, sans référence ontologique ni essentialiste. Le concept de Dieu, par exemple, n'a pour moi aucune ontologie : il n'est qu'un concept organisateur, un fort engagement théorique. En effet, il est un des plus forts: il permet de départager très nettement Bien et Mal, âme et corps (tout comme on distinguera logiciel et matériel), de faire partir en guerre des peuples entiers. Avons-nous un concept structurant l'homme, la société, le monde … plus puissant ? Les mathématiques, dont le concept d'infini doit beaucoup à celui de Dieu, n'arrivent pas à avoir la même force organisatrice des affaires du monde. Laplace utilise ce concept pour donner une bonne définition de déterminisme classique ; je l'ai utilisé, d'une façon plus maladroite, pour introduire le rôle différent, par rapport aux cadres classiques, de l'indétermination et de l'aléatoire dans certaines *approches théoriques* à la microphysique. Pour le reste, mis à part Dieu, je ne peux que renvoyer au texte de Mugur-Schächter.

Le commentaire de **Daniel Kayser** reprend quelques aspects de mon analyse entre modélisation mathématique et réalisation physique. J'espère que la référence aux phénomènes est claire : d'un coté vous avez les phénomènes physiques, de l'autre nos tentatives pour les rendre intelligibles par les mathématiques, du continu ou du discret, par exemple. Les mathématiques du continu nous donnent une (bonne ?) notion de variation (elles ont été inventées pour cela), les autres une (bonne ? pas trop... voir plus haut) approximation des variations possibles. Aucune des deux approches ne coïncide avec "le réel" : elles essayent de le structurer. Or, la machine logico arithmétique, à états discrets, n'arrive pas à imiter d'une façon indistinguable certains processus dont ceux que les mathématiques du continu *appellent* "non-linéaires". L'itération est le tout premier critère de la distinguabilité : itérer un double pendule physique est bien facile ; quant à un fleuve turbulent, je propose de fermer et re-ouvrir les vannes avec la mécanique la plus soignée possible.... Dans les deux cas, vous n'aurez pas la même évolution, l'approximation de la mesure physique et la dynamique instable obligent ; tandis qu'une machine à états discrets peut être programmée pour redémarrer sur les mêmes digits, exactement (grâce à sa base de données discrètes ; au fond, c'est la topologie discrète sous-jacente qui nous propose très peu de structure et de corrélations). Les mathématiques du continu, nées autour du concept de variation infinitésimale, *modélisent* ces problèmes, plus ou moins bien selon les cas, mais elles ne coïncident évidemment pas avec le réel non plus. Peut-on *imiter* la variation en dessous de l'approximation de la mesure par l'aléatoire digitale, la bogue ou par d'autres astuces ? J'en parle longuement dans le texte et j'y reviendrai plus bas : il doit être clair toutefois que ces astuces proposent un autre régime causal (le comportement va être différent pour *d'autres raisons*). Voilà le sens que je donne au mot "imitation", suggéré par le grand Turing, par opposition à "modélisation" (en tant que tentative de saisir/proposer des principes constitutifs du phénomène observé, des principes qui les rendent mathématiquement intelligible).

Quant à la remarque « le système nerveux n'est sûrement pas une MED », ce n'est pas moi qui la fait, mais Turing. Et il continue : « une petite erreur dans l'information sur la taille de l'impulsion nerveuse... » (page 162 de la version française). Cette sensibilité, qu'il cite en différents endroits, est ce qui caractérise certains systèmes dynamiques (continus, dans sa terminologie), en particulier ceux auxquels il est en train de travailler pour son article sur la morphogenèse de'52. Personnellement, je ne m'engage point sur la nature ni sur les meilleures mathématiques pour parler du cerveau : je ne fais que jouer le jeu de Turing avec ses hypothèses mathématiques – une "machine discrète" contre une "continue". Quant au cerveau, je le considère comme un organe du vivant, dont je donne, très brièvement dans la note 13, une "pâle image physique" en tant qu'objet énormément plus complexe que n'importe quel système dynamique analysé par un seul niveau d'organisation mathématique (voir (Bailly, Longo, 2003b)).

Le nombre π, cité par Kayser, n'est sûrement pas, pour moi non plus, une réalité physique. Il est une construction conceptuelle, en fait une construction géométrique, qui donne un tout premier résultat d'incomplétude, en tant que décalage entre principes de construction et principes de preuve (voir (Longo, 1999), (Bailly, Longo, 2004)). Avec règle, compas et opérations de limite, en tant que *structures conceptuelles*, vous construisez π. Théorème remarquable : la théorie des équations algébriques, avec ses calculs et preuves formelles, est *incomplète* par rapport à cette construction géométrique. Mais ici, tout est bien approximable, quoique rien ne soit dans le monde. On peut faire la construction dans le monde, si on prend une règle et un compas physiques : la géométrie euclidienne du continu nous propose alors une valeur mathématique, qui n'est pas physique, mais seulement une structuration conceptuelle du processus matériel ; les équations algébriques en sont une bonne approximation. Les deux approches organisent donc la construction physique de façon différente, mais, dans ce cas, l'approximation algorithmique-algébrique, quoique incomplète, est bonne, itérable, sans problème. Il peut ne pas être ainsi si vous considérez un processus un peu plus instable.

Kayser reprend une remarque qui est faite aussi par Turing : *pratiquement*, aussi l'évolution (le prochain pas !) d'un programme d'ordinateur suffisamment complexe est imprédictible – trop de lignes de code à regarder. Mais, Turing, tout comme Kayser, a clairement à l'esprit qu'une chose est une difficulté pratique, une autre une impossibilité mathématique, de principe. Quand les astronomes démontrent que la position de Pluton dans un million d'années (ce qui n'est pas beaucoup en termes astronomiques) est imprédictible, suite au comportement relativement chaotique de cette petite planète périphérique, nous avons une information plus importante que s'ils nous avaient dit : « vous savez, prédire son évolution est trop compliqué » (mais on reviendra sur ce point, soulevé aussi par Jacques Pitrat). Dans ce cas et en général, je ne pense point que les différences entre mathématiques du continu et processus du réel soient négligeables, car je ne connais pas le réel, sinon par nos moyens conceptuels d'organisation (mathématique) actuels. Il est possible qu'avec des mathématiques zouzo à inventer, on pourra faire mieux, dans 5.000 ans, quant aux prédictions : en fait pour *pré-dire*, il faut quelqu'un qui *dise*. L'imprédictibilité n'est pas dans le monde, mais elle est à l'interface entre nous et le monde : après la construction d'un cadre causal d'objectivité scientifique, elle peut être posée en tant que problème épistémique, comme dans le cas de l'aléatoire classique ou chaos déterministe. Mais notre cadre conceptuel peut changer et s'améliorer. Or, c'est ça ma thèse : dans certains cas critiques, les outils du discret et du continu mathématiques actuels diffèrent remarquablement. En particulier, les premiers n'arrivent pas à donner une "bonne approximation" de certains processus physiques ou en diffèrent de façon bien distinguable ; dans ces cas et grâce à énormément de quantitatif, on obtient des (remarquables) imitations qualitatives. Les deuxièmes ne permettent que rarement des calculs, mais proposent des notions organisatrices, parfois cruciales pour rendre intelligibles certains processus et très mal imitées par la machine : variation, fluctuation, singularité, état critique, divergence (en acte) ….

Je remercie enfin Kayser d'avoir signalé l'inopportunité de la référence trop appuyée aux excuses présentées par Sir James Lighthill, un grand de la mécanique classique. Et je m'excuse pour mon emportement / passion philosophique, inadapté à un article de réflexion scientifique.

Jacques Pitrat, dans son commentaire, propose d'enterrer le "test de Turing", tout comme moi : je n'ai dédié que quelques lignes à la comparaison homme/machine, qui a fait tant de bruit. Tout à fait d'accord : le problème est de concevoir des programmes performants, pour leurs propres buts, avec les caractéristiques propres des machines. Quand, en tant qu'informaticien, je me suis retrouvé à côtoyer des biologistes (rares) ou des cognitivistes et des philosophes (nombreux) qui parlent de programmes dans le génome, dans la phylogenèse, dans le cerveau … j'ai eu l'impression que ces collègues n'appréciaient pas suffisamment la force et les rails pour la pensée dans lesquelles la théorie des programmes et de la calculabilité (ma passion depuis longtemps) organise le monde, avec sa propre expressivité et ses limites. Et les raisons sont nombreuses. Dans certain cas, aux USA par exemple, cette philosophie paraît s'accorder très bien avec la notion protestante de prédestination – dans *Nature* (Young et al. 1999, 400, 766-788) on a même présenté le gène de l'infidélité conjugale … que voulez-vous, quand on y est prédestiné-programmé …, sur la base d'expériences génétiques qu'un article de Catherine Vidal, biologiste, a critiqué très ponctuellement. De plus, on trouve assez facilement des financements pour la recherche quand on propose de construire un "modèle computationnel" de n'importe quoi, surtout en biologie et en cognition, sans l'analyse du jeu triangulaire entre phénomène/ modèle continu/ imitation computationnelle, qui, parfois, est faite en physique mathématique. La prédiction de Réné Thom paraît s'avérer : « en science, on calcule de plus en plus et on comprend de moins en moins ». Or, les calculs devraient être fait pour comprendre, tout d'abord (cette réflexion, comme tout mon travail, vise à comprendre ce que font les calculs, pour qu'ils nous aident mieux à... comprendre).

Revenons donc à nos machines et à leurs imitations très efficaces, quoique distinguables : si l'on saisit avec rigueur le régime de causalité bien particulier et fort qui leur est propre, on pourra en principe faire encore mieux. On peut surtout avoir plus d'information scientifique au sujet du jeu entre objet d'étude et tentative de le structurer/simuler par la machine arithmétique, sans s'handicaper, comme dit fort justement Pitrat, avec les inefficacités du comportement humain/naturel (si le web était aussi flou que notre mémoire, si lent que nos réactions neuronales, aussi infidèle que la communication de bouche à oreille des humains, il serait bien inutile : essayez de le remplacer par un réseau d'humains qui se passent des informations et des souvenirs par voie orale, en mode analogique …).

Pitrat a parfaitement raison de rappeler que, en pratique, maints programmes compliqués et, surtout, basés sur l'interaction avec un environnement changeant, peuvent être irrépétables. En fait, l'interface entre un système digital et un environnement dynamique est toujours problématique et fortement instable, en particulier puisque le monde est tout sauf une switchboard digitale et la friction se fait entre systèmes que, pour des bonnes raisons, nous organisons par des régimes causaux différents.

Dans mon texte je parle aussi des imperfections possibles du hardware, des bogues dans le programme (Pitrat observe qu'ils peuvent se manifester de façon intermittente, après quelques itérations). Quand on est passé, par exemple, dans les années '60, de la programmation en assembleur des grands calculs d'astronomie à celle en Fortran, des compilateurs artisanaux (différents) introduisaient des erreurs différents et fort fâcheuses – bientôt éliminées ; même aujourd'hui, l'itération 10^{15} fois d'une sous-routine de calcul complexe (les astronomes font ce genre de chose) engendre presque sûrement des erreurs imprévues ou des calculs irrépétables (dans mon article ce genre de raretés statistiques est mentionnée). Toutefois, quand Pitrat dit que ce sont « des idées reçues » qui nous font croire que les programmes sont toujours répétables, il fait en fait référence à la *théorie* des programmes et de la calculabilité, telle qu'elle est depuis Turing, bien solide et efficace. Cette théorie et ses applications, jusqu'à présent, n'intègrent pas ce genre d'accidents qui rendent certains processus imprédictibles, voire irrépétables : son but est la répétabilité, la fiabilité, la portabilité du logiciel. En revanche, la théorie des systèmes dynamiques (continus, dit Turing) intègre l'imprédictibilité, de façon essentielle, inhérente à la théorie : elle a même démarré avec un grand théorème à ce sujet. Mais alors, que l'on développe, dans le but d'une nouvelle IA, par exemple, une théorie moderne de la programmation "perturbée" avec des résultats spécifiques et forts d'imprédictibilité au fini (comme Poincaré), pas seulement d'indécidabilité à l'infini (comme Turing). On pourrait alors mettre en évidence de façon mathématique plus précise, la différence entre l'éventuel "régime perturbatif" décrit par la machine discrète et celui proposé par des systèmes du continu[3]. La panne du serveur, voire les conséquences sur le digital de la variation quantique de la lumière (qui n'est point discrète dans le sens du

[3] En informatique, la théorie récente des "systèmes hybrides", qui mélange dynamiques continues et algorithmes discrets, va peut-être dans ce sens ; sûrement elle nous éloigne du mythe du tout computationnel.

digital), de la batterie, du positionnement, etc., dont parle Pitrat, seront enfin intégrées dans une théorie propre de certaines applications modernes des MED. En partie cela est en train d'être fait : les problèmes de la synchronisation, avec la possibilité d'une itération différente, par asynchronie, mentionnée par Pitrat, sont au cœur de la théorie moderne des calculs concurrents, parfois distribués dans un environnement changeant. On comprend alors que ce travail théorique est très difficile, car nous avons inventé récemment des machines à états discrets, distribuées, très originales, mélange tout à fait nouveau entre construction artificielle et temps et espace physiques. En particulier, ce que l'on peut perdre dans un système concurrent, c'est l'absolu de l'accès aux bases de données : or, tout est fait pour le récupérer (voir (Goubault, 2000 ; Aceto et al., 2003)).

Cela ne touchera l'informatique de la répétabilité que pour l'améliorer : je veux pouvoir relancer mon application Macintosh, même en réseau, à l'identique, autant de fois que possible, faire des calculs astronomiques ou d'ingénieur et consulter le web de façon exacte et absolue, sans bogues. Quelle force nous avons dans ce digital qui réalise presque parfaitement les mythes de la certitude programmable des pères fondateurs de la logique ! Quand on choisit une philosophie de l'arithmétique comme fondement de la connaissance, il faut en assumer les limites et les avantages : il est si rare d'avoir à disposition une telle régularité théoriquement prédictible, à la quinzième décimale. Dans les processus naturels, on en trouve seulement dans quelques oscillations atomiques, quelques phénomènes électroniques et chimiques, les pulsars … – même les planètes ne sont pas très fidèles aux rendez-vous. Viceversa, j'insiste, une analyse mathématique adéquate des rares phénomènes de l'irrépétabilité (singularité, transitions de phases...), que l'on trouve même dans les MED physiques, peut, d'un côté, aider à les éviter quand on n'en veut pas, de l'autre améliorer les imitations, où ces phénomènes peuvent être utiles, comme dit Pitrat.

Deux derniers points. Si l'on étend un ordinateur avec un générateur de nombres aléatoires non programmable (le bruit de fond d'un tube à vide dont parle Pitrat ; un boîtier qui donne le résultat macroscopique d'un "spin up / spin down" quantique – ils en vendent au CERN, à Genève), on obtient une *autre* machine ; en particulier, on va vers une machine (sémi-)quantique. Une des deux directions auxquelles je pense quand, à la fin de mon article, je critique ceux qui croient que nous avons désormais la "machine finale", au moins en principe, la méthode algorithmique définitive, celle des lois de la pensée de Boole et Frege (on y programme l'induction arithmétique, donc « tout ce qui est pensable » …), la machine complète de Laplace-Hilbert (qui intègrerait la décidabilité des théories équationnelles ou formelles, implantation du « non ignorabimus » hilbertien) et je suggère qu'il est temps de penser à la prochaine machine. Les outils et les machines sont essentiels à l'homme, mais ils passent, tout comme les mauvaises philosophies de la connaissance et de la cognition qu'ils peuvent engendrer ; nous, les hommes, on reste (on espère), grâce aussi aux machines.

Pitrat fait brièvement référence à des systèmes d'exploitation qui se modifient dans l'interaction avec les programmes qu'ils gèrent (ou avec l'environnement de calcul). Il existe aussi des interprètes et des compilateurs appelés "meta-circulaires", dont la syntaxe est dynamique grâce à la redéfinition de certains de ses composants, au cours de l'exécution. Celles-ci sont toutes des structures logiques de type imprédicatif ; en fait, elles sont des applications intéressantes d'une forme d'imprédicativité pas assez étudiée (l'évolution globale du système contribue à définir la situation locale – les composants du programme). Personnellement, j'ai longtemps travaillé dans le cadre de théories imprédicatives à la forte expressivité et à la sémantique catégorique difficile (voir (Asperti, Longo, 1991)) : un vrai épouvantail pour les fondationnalistes / prédicativistes – on perd les certitudes des types stratifiés …. Il y a sûrement des différences, mais le cadre logico-mathématique est le même : il s'agit de théories formelles, entièrement ancrées dans le discret de l'arithmétique sous-jacente, où la définition globale participe aux définitions particulières. À une certaine époque, j'ai cru voir plus que des analogies possibles, comme celles décrites dans (Longo, 2000), entre ces formes de circularité et les effets de résonance qui sont au cœur de l'imprédictibilité dans les systèmes dynamiques, à la Poincaré : dans ce cas aussi, l'analyse locale ne peut pas être séparée de l'évolution globale (du système planétaire). J'ai donc considéré les neuf équations du problème des trois corps, avec tous leurs "renvois réciproques" dus à l'interaction gravitationnelle, et je me suis demandé si la logique des systèmes imprédicatifs pouvait nous dire quelque chose sur ce qui se passait (de la circularité définitionnelle à l'imprédictibilité – insolubilité analytique). Or, il n'en est rien : les problèmes sont orthogonaux. La complexité logique du système d'équation est moindre : une petite théorie du premier ordre l'engendre sans problèmes. La complexité se situe entièrement dans la structure géométrique des trajectoires engendrées. En utilisant la terminologie proposée et détaillée dans (Bailly, Longo, 2003b), on pourrait décrire cette différence grâce à deux notions générales de complexité, qui ont inspiré le jeu "objectif/épistémique" dans l'article sur Turing : la première est celle de complexité "objective" ou (logico-)mathématique (propres au liens causaux décrit par les équations), l'autre de complexité "épistémique" (qui s'impose par la géométrie des trajectoires). L'équation logistique est un cas encore plus épatant de grande simplicité logico-algébrique vs. grande complexité épistémique. De même, pour ne pas faire croire aux cognitivistes et aux philosophes que les interprètes ou compilateurs circulaires, qui se modifient avec leur environnement digital, sont un modèle, voire la *même chose* que la dynamique des systèmes continus ou … les circularités de la conscience, nous devons travailler à une bonne théorie logico-mathématique de ces phénomènes propres aux MED modernes. Les distinctions fines en seraient un premier outil. *Ensuite*, l'unification par des corrélations techniques possibles, des ponts inattendus, des applications réciproques en serait un développement possible, fort utile. La physique moderne nous a montré que la modélisation de l'atome comme petit système planétaire, dérivée assez naïvement des travaux de Rutherford, était une mauvaise "unification", voire même une mauvaise imitation. Depuis, l'analyse fine, la microphysique quantique, a commencé et, aujourd'hui, on travaille sérieusement à l'unification, entre micro- et astro-physique, par tout autres chemins, par des nouvelles synthèses.

De même, le comportement imprévisible d'un robot numérique, dans un environnement pour lequel il n'avait pas été programmé ou qui a varié en dessous du seuil de la mesure physique, n'a rien à voir avec l'imprédictibilité de la trajectoire d'un double pendule et encore moins avec le comportement d'un jeune animal avec son enchevêtrement de niveaux d'organisation et ses réentrées neuronales dynamiques et en devenir ((Edelman, Tononi, 2000)) : on les comprend grâce à des structurations causales différentes. Ou, avant de trouver des analogies, il faudrait d'abord faire une bonne théorie du robot, qui mélange la stabilité et le régime causal du digital à la variabilité du contexte physique.

Je remercie enfin **Jean Lassègue** pour ses commentaires très flatteurs au sujet du cadre épistémologique nouveau que mon article proposerait. J'espère contribuer à un débat, avec mes articles récents, auxquels, je dois reconnaître, la fréquentation de physiciens qui pensent a beaucoup contribué : la philosophie de la physique du 20ème siècle a 100 ans d'avance sur celle de la logique et de ses dérivés, comme l'informatique. La bifurcation, que je cite souvent, entre géométrisation de la physique et arithmétisation des fondements, qui a eu lieu à la fin du 19ème siècle et qui est passé à côté des deux (voire trois) grandes révolutions épistémologiques dues à la physique, en est la raison principale. Du reste, si ma critique du mythe des "modèles computationnels" peut aider à en faire des meilleurs, j'en serais ravi : la notion de "jugement géométrique", par exemple, proposée dans (Longo, 2002) pour mettre en évidence *les incomplétudes* des jugements logico-formels, a intéressé des collègues de … LogiCal, un projet en démonstration automatique à l'INRIA (elle pourrait suggérer des extensions de leur remarquable système de proof-checking et proof-assistance, bien formel). C'est ainsi que fonctionne le travail scientifique ….

Toutefois, les mythes et les succès de l'ordinateur sont si importants, leur enracinement dans un paradigme qui va de la mécanique du 18ème et 19ème siècle aux formalismes logiques du 20ème si solide, que les informaticiens conscients des limites et de l'expressivité de ces machines formidables peuvent avoir des difficultés à se soustraire aux mirages de la philosophie de la computation arithmétique, encore à la mode dans les cercles cognitivistes. Le travail de Jean Lassègue et ses collègues, centré sur le rôle du langage, des gestalt, des formes symboliques, entre anthropologie et linguistique, est un apport important au débat. Malheureusement, je n'ai pas les compétences pour commenter la tentative que fait Lassègue dans son texte, d'interpréter les idées de Turing pour qu'elles deviennent une source d'inspiration même dans ces domaines : je ne peux qu'apprécier de loin cet effort et aider à comprendre ces importants changements en science qui peuvent être engendrés par la moindre variation des mythes, comme conditions initiales ou aux limites.

Biobliographie

(les textes non cités ici se trouvent dans l'article cible des commentaires ; les articles de l'auteur sont téléchargeables de http://www.di.ens.fr/users/longo)

Bailly F. Longo G. « Sur des rapports entre fondements des mathématiques et de la physique », en préparation, 2004.

Edelman G., Tononi G. *A Universe of Consciousness. How Matter Becomes Immagination*, Basic Books, 2000.

Fabbrichesi-Leo R. *Continuità e vaghezza*, CUEN, Milano, 2001.

Van Frassen B. *Lois et symetries*, Vrin, Paris, 1994.

van Gelder T. "The dynamical hypothesis in cognitive sciences", *target article and discussion*, *Behavioral and Brain Sciences*, n. 21, 1998.

Longo G. "The mathematical continuum, from intuition to logic" in *Naturalizing Phenomenology: issues in comtemporary Phenomenology and Cognitive Sciences*, (J. Petitot et al., eds) Stanford U.P., 1999 (version française du même volume, CNRS éditions, 2002).

Longo G. « Cercles vicieux, Mathématiques et formalisations logiques ». Conférence Invitée, parue dans *Mathématiques, Informatique et Sciences Humaines*, n. 152, 2000.

Pilyugin, S. Yu. *Shadowing in dynamical systems*, Springer, Berlin, 1999.

Sauer T. "Shadowing breakdown and large errors in dynamical simulations of physical systems", preprint, George Mason Univ., 2003.

Weyl H. *Philosophy of Mathematics and of Natural Sciences*, 1927 (english transl., Princeton University Press, 1949).

Weyl H. *Symmetry*, Princeton University Press, 1952.